

# Ansatz zu einer divergenzfreien Quantenelektrodynamik

Von GÜNTHER LUDWIG

Aus dem Institut für theoretische Physik der Freien Universität Berlin

(Z. Naturforsch. 5a, 637—641 [1950]; eingegangen am 27. November 1950)

Im ersten Teile wird gezeigt, daß die Divergenzen der bisherigen Theorien nicht auf der Störungstheorie, sondern schon auf dem Wechselwirkungsansatz beruhen. Der zweite Teil zeigt die Möglichkeit einer Quantenelektrodynamik ohne Selbstenergie des Elektrons, für die allerdings ein einziges Elektron in der Welt keine Strahlung emittieren würde. Die Strahlung kommt erst durch die Wechselwirkung mit vielen anderen Elektronen zustande (Absorbertheorie).

Die Arbeiten von **Schwinger**, **Dyson** und **Feynman**<sup>1</sup> zeigen, daß es wenigstens in den Schritten der Störungsrechnung möglich ist, divergente Glieder durch Renormalisierung von Masse und Ladung zu beseitigen. Man könnte dies auch so formulieren: Nach Streichen der unendlichen Glieder erhält man eine neue Formulierung der Quantenelektrodynamik, die korrespondenzmäßig mit der klassischen Theorie genau so gut übereinstimmt wie die zuerst angesetzten Gleichungen, aber wenigstens bis zu den benutzten Gliedern der Störungsrechnung divergenzfrei ist. Da nun viele beobachtete Effekte, wie der Lamb-shift und die Abänderung des  $g$ -Faktors des Elektrons, nur auf der Wirkung der langreichweitigen elektromagnetischen Kräfte beruhen und nicht von irgendwelchen Abschneidemethoden abhängen<sup>2</sup>, die die Ruhemasse usw. endlich machen, müßte es eigentlich gelingen, eine in sich geschlossene Theorie des elektromagnetischen und Elektronenwellenfeldes zu finden, ohne auf die Effekte eingehen zu müssen, die die Ruhemassen der Teilchen festlegen. Diese Theorie hätte ihre wahrscheinliche Gültigkeitsgrenze bei Energien der Größenordnung der Mesonenruhemassen. Ein Schritt in dieser Richtung wird hier versucht.

Die Arbeit von **Pauli** und **Villars**<sup>3</sup> hat gezeigt, wie man formal reguläre Resultate erhalten kann. Der hier versuchte Ansatz gestattet, die dort eingeführten Massen als *reelle* Massen zu deuten, ohne auf die Schwierigkeit negativer Quanten zu stoßen, wie es bei **Pais** und **Uhlenbeck**<sup>4</sup> geschehen ist.

Der Kerngedanke ist eine Übertragung der klassischen Überlegungen von **Wheeler** u. **Feynman**<sup>5</sup> auf die Quantenmechanik: Das elektromagnetische Feld wird nicht als Feld mit neuen Freiheitsgraden eingeführt, sondern ist nur implizit durch die Elektronen definiert.

## 1. Gründe für die Divergenzen der bisherigen Theorien

Die Frage nach der Ursache der Divergenzen in den bisherigen Feldtheorien läßt sich entscheiden: Nicht die Störungstheorie ist die eigentliche Ursache, sondern die bisher benutzten Ansätze sind, mathematisch gesehen, divergente Integrale.

Um dies zu zeigen, betrachten wir als Beispiel ein Integral der Form

$$A = \int g(k_1 \dots k_n; k_1' \dots k_l') a^*(k_n) \dots a^*(k_1) a(k_l') \dots a(k_1') dk_1 \dots dk_l'. \quad (1)$$

Die  $a^*$ ,  $a$  sind hierbei Operatoren, die den Vertauschungsrelationen

$$[a^*(k), a(k')] = -\delta(k - k'), \quad [a^*(k), a^*(k')] = [a(k), a(k')] = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup> J. **Schwinger**, Physic. Rev. **74**, 1439 [1948]; **75**, 651 [1949]. R. P. **Feynman**, Rev. mod. Physics **20**, 367 [1948]; Physic. Rev. **74**, 939 [1948]. F. J. **Dyson**, Physic. Rev. **75**, 486 [1949].

<sup>2</sup> R. P. **Feynman**, Physic. Rev. **74**, 939 [1948]; **74**, 1430 [1948].

<sup>3</sup> W. **Pauli** u. F. **Villars**, Rev. mod. Physics **21**, 434 [1949].

<sup>4</sup> A. **Pais** u. G. E. **Uhlenbeck**, Physic. Rev. **79**, 145 [1950]; s. auch W. **Thirring**, Physic. Rev. **79**, 703 [1950].

<sup>5</sup> J. A. **Wheeler** u. R. P. **Feynman**, Rev. mod. Physics **17**, 157 [1945]; **21**, 425 [1945].



genügen. Eine Darstellung dieser Operatoren erhält man nach Becker und Leibfried<sup>6</sup> in der Form:

$$a(k) \Phi_0 = 0; \quad a^*(k_j) \dots a^*(k_1) \Phi_0 = \sqrt{j!} \Phi_{k_1 \dots k_j};$$

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(k_1 \dots k_n) \Phi_{k_1 \dots k_n} dk_1 \dots dk_n \quad \text{der allgemeine Zustand}; \quad (3)$$

$$(\chi, \chi') = \sum_n \int f_n^* f_n' dk_1 \dots dk_n.$$

Damit der Operator (1) zusammenaddiert mit seinen hermitisch konjugierten einen selbstdadjungierten Operator bildet, ist es unbedingt erforderlich, daß es im Hilbert-Raum der  $\chi = \sum_n f_n \Phi_{k_1 \dots k_n} dk_1 \dots dk_n$  eine dichte Menge gibt, für die der Operator (1) definiert ist, d. h. er muß aus einem Vektor dieses seines Definitionsbereiches wieder einen Vektor  $\chi' = \sum_n f_n' \Phi_{k_1 \dots k_n} dk_1 \dots dk_n$  des Hilbert-Raumes machen, für den also

$$\sum_n \int |f_n'|^2 dk_1 \dots dk_n$$

konvergent ist. Dies ist aber nicht für jede beliebige Wahl der Funktionen  $g(k_1 \dots k_l)$  aus (1) richtig. (1) macht aus dem Vektor  $\chi$  den Vektor  $\chi' = \sum_n \int f_n' \Phi_{k_1 \dots k_n} dk_1 \dots dk_n$

$$\text{mit } f_{j-l+n}^{(k_1 \dots)} = \frac{\sqrt{j! (j-l+n)!}}{(j-l)!} \int g(k_1 \dots k_n; k_1' \dots k_l') f_j(k_1' \dots k_l' k_{n+1} \dots k_{n+j-l}) dk_1' \dots dk_l'.$$

Es muß also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n'(k_1 \dots k_n)|^2 dk_1 \dots dk_n \quad (4)$$

konvergent sein für eine geeignete Menge der  $f_n$ , für die  $\chi$  im Hilbert-Raum dicht liegen.

Hat man statt (1) einen Operator der Gestalt

$$B = \int g(k_1 \dots k_l'; k_1'' \dots k_s''') a^*(k_n) \dots a(k_1') b^*(k_m'') \dots b(k_1'''') dk_1 \dots dk_s'''', \quad (5)$$

wobei die  $a$  mit den  $b$  vertauschbar sind (sie mögen z. B. zu zwei verschiedenen Feldern gehören), so findet man auf dieselbe Art, daß  $\sum_{n_1 n_2} \int |f_{n_1 n_2}|^2 dk_1 \dots$  konvergent sein muß mit

$$f_{j_1-l-n, j_2-s-m}^{(k_1 \dots; \bar{k}_1 \dots)} = \frac{\sqrt{j_1! (j_1-l+n)! j_2! (j_2-s+n_1)!}}{(j_1-l)! (j_2-s)!}$$

$$\cdot \int g(k_1 \dots; k_1' \dots; \bar{k}_1 \dots; k_1'' \dots) f_{j_1 j_2}(k_1' \dots k_{n+1} \dots; k_1'' \dots; k_{m+1} \dots) dk_1' \dots dk_1'' \dots \quad (6)$$

Es ändert sich ebenfalls nichts Wesentliches für den Fall der Fermi-Statistik, wo die Operatoren den Plus-Vertauschungsrelationen genügen.

Die bisher üblichen Ansätze für die Operatoren der Wechselwirkung erfüllen nun die Bedingungen (4) oder (6) in keiner Weise, wie man in den Einzelfällen, z. B. für  $\int A_\nu j_\nu dx dy dz$ , durch Übergang in den Impulsraum zeigen kann.

Die Diskussion von (1) zeigt auch hier noch einmal die schon bekannte Tatsache, daß es immer günstiger ist, die erzeugenden Operatoren soweit als möglich nach links zu schreiben, worauf in den folgenden Ableitungen geachtet werden wird.

## 2. Klassische Theorie des Elektronenwellenfeldes und Elektromagnetismus

Die Elektronen werden durch ein Wellenfeld  $\psi(x_\mu)$  (Diracscher Spinor) beschrieben, das ohne elektromagnetische Wechselwirkung der Dirac-Gleichung\*

$$\gamma^\mu \psi_{|\mu} + m \psi = 0 \quad (7)$$

<sup>6</sup> R. Becker u. G. Leibfried, Z. Physik **125**, 347 [1949].

<sup>7</sup> H. Kümmel, Z. Naturforsch. **5a**, 642 [1950].

\* Es ist  $F_{|\mu} = \frac{\partial F}{\partial x_\mu}$ .

genügt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung werde mit  $\psi_0$  bezeichnet. Für den Fall der Wechselwirkung ersetze man das in der Gleichung

$$\gamma^\mu \psi_{|\mu} + m \psi = i e A_\mu \gamma^\mu \psi \quad (8)$$

auftretende Viererpotential durch das von  $\psi$  selbst hervorgerufene Feld:

$$A_\mu(x) = e \int \delta((x_\nu - y_\nu)^2) \bar{\psi}(y) \gamma_\nu \psi(y) dy^{**}. \quad (9)$$

Statt der Differentialgleichung (8) setzen wir die gleichwertige Integralgleichung:

$$\psi(1) = \psi_0(1) + i e \int K(1, 2) A_\mu(2) \gamma_\mu \psi(2) d\tau_2. \quad (10)$$

Hierbei ist  $K(1, 2)$  die Greensche Funktion der Dirac-Gleichung, d. h. eine Lösung von

$$\gamma^\mu \psi_{|\mu} + m \psi = \delta(1, 2) \varphi_K \quad \text{mit} \quad \varphi_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{K-te Stelle.}$$

Wir wählen speziell die von Feynman vorgeschlagene Lösung:

$$K(1, 2) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} e^{-iE_n(t_1 - t_2)} u_n(1) u_n(2) \gamma_4 & \text{für } t_1 > t_2 \\ - \sum_{E_n < 0} e^{-iE_n(t_1 - t_2)} u_n(1) u_n(2) \gamma_4 & \text{für } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (11)$$

Für später sei bemerkt, daß wir  $K(1, 2)$  zerlegen können nach der Art:

$$K(1, 2) = K_+(1, 2) + K_-(1, 2):$$

$$K_+ = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} & \text{für } t_1 > t_2 \\ 0 & \text{für } t_2 > t_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{und } K_- = \begin{cases} 0 & \text{für } t_1 > t_2 \\ - \sum_{E_n < 0} & \text{für } t_2 > t_1. \end{cases}$$

für  $x^2 - t^2 < 0$  und

für  $x^2 - t^2 > 0$ :

$$K_+ = K_- = \frac{1}{2} K.$$

Setzt man (9) in (10) ein, so erscheint das elektromagnetische Feld nicht mehr explizit in der Grundgleichung (10). Trotzdem kann man natürlich die Feldstärken „definieren“:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu|\mu} - A_{\mu|\nu}. \quad (13)$$

\*\*  $dy$  = Integration über die ganze Welt.

Zur Herstellung eines Energie-Impulsvektors kann man in der klassischen Theorie den üblichen Energie-Impulstensor benutzen, der aus den Spinoren  $\psi$  und den Feldstärken  $F_{\mu\nu}, A_\nu$  gebildet ist. Denn mit diesem Tensor gilt der Erhaltungssatz, wenn die Diracschen und Maxwellschen Feldgleichungen erfüllt sind. Er muß also weiterhin gelten, wenn man für die elektromagnetischen Feldstärken eine spezielle Lösung der Maxwellschen Gleichungen einsetzt. An dieser Stelle tritt aber eine wesentliche Änderung beim Übergang in die Quantenmechanik auf, da in dieser die einzelnen Größen nicht mehr miteinander vertauschbar sind.

### 3. Quantisierung ohne Löchertheorie

Die übliche Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes können wir als bekannt voraussetzen, so daß wir nur auf die Abweichungen einzugehen brauchen. Die Gln. (7) bis (13) fassen wir als Operatorgleichungen auf. Um den Operator  $\psi(1)$  zu bestimmen, gehen wir von der Integralgleichung (10) aus. Alle Faktoren sind in der Reihenfolge zu belassen, die sie oben haben. Für  $\psi_0$  setzen wir dabei den bekannten Operator ein, der folgende Wirkungsweise hat:

$$\psi_0(1) \Phi_0 = 0, \quad (14a)$$

$$[\psi_{0a}(1), \bar{\psi}_{0\beta}(2)] = i \left( \gamma_{a\beta}^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \Delta(1, 2) \equiv i S_{a\beta}(1, 2). \quad (14b)$$

Den Hilbert-Raum kann man aus den Vektoren

$$\Phi_0, \psi_{0a}^*(\mathbf{r}, 0) \Phi_0 = \Phi_a \mathbf{r},$$

$$\psi_{0a}^*(\mathbf{r}_1, 0) \psi_{0\beta}^*(\mathbf{r}_2, 0) \Phi_0 = \Phi_a \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \quad (14b)$$

nach

$$z = z_0 \Phi_0 + \sum_a \int z_a(\mathbf{r}) \Phi_a \mathbf{r} d\mathbf{r} + \sum_{a\beta} \int \int z_{a\beta}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \Phi_a \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 + \dots$$

aufbauen.

$\Phi_0$  ist der Zustand „Vakuum“. Der Ansatz (14) gilt ohne Löchertheorie. Durch Lösung der Integralgleichung (10) ergibt sich dann der Operator  $\psi(1)$ .

Wir stellen zunächst fest, daß

$$\psi(1) \Phi_0 = 0 \quad (15)$$

ist, denn wendet man (10) auf den Zustand  $\Phi_0$  an, so stellt (15) tatsächlich eine Lösung dar. Ebenso leicht zeigt man nun aber, daß auch für  $z_1 = \sum_a \int z_a(\mathbf{r}) \Phi_a \mathbf{r} d\mathbf{r}$

$$\psi(1) z_1 = \psi_0(1) z_1 \quad (16)$$

gilt. Denn wendet man (10) auf einen Zustand mit einem Elektron an, so folgt mit (15) leicht die Behauptung (16). Dies legt sofort die Vermutung nahe, daß in dieser hier formulierten Theorie das Elektron *keine* Selbstenergie besitzt, denn ein einziges Elektron in der Welt benimmt sich mit Wechselwirkung genau so wie ohne diese.

Der Ladungserhaltungssatz für den Vektor  $\bar{\psi} \gamma_\nu \psi$  bleibt bestehen, wie man sich leicht überlegt. Die Divergenzgleichung für den klassischen Energie-Impulstensor läßt sich aber nicht übertragen! Es läßt sich aber sehr leicht ein Ausdruck für den Energie-Impulsvektor raten, indem man den Ausdruck dieses Vektors ohne Wechselwirkung

$$G_m(\sigma) = \int_{\sigma} \bar{\psi} \gamma_\nu \psi_{|m} d\sigma_\nu$$

in seiner Veränderlichkeit mit  $\sigma$  (einer raumartigen Fläche) untersucht. Man findet

$$\Delta G_m(\sigma) = \int_{\sigma}^{\sigma'} (\bar{\psi} \gamma_\nu \psi_{|m})_{|\nu} d\tau = i e \int_{\sigma}^{\sigma'} \bar{\psi} A_{\mu|m} \gamma_\mu \psi d\tau.$$

Daraus folgt sofort, daß der Ausdruck

$$G_m(\sigma) = \int_{\sigma} \bar{\psi} \gamma_\nu \psi_{|m} d\sigma_\nu - \frac{i e}{2} \left( \int_{-\infty}^{\sigma} - \int_{\sigma}^{\infty} \right) \bar{\psi} A_{\mu|m} \gamma_\mu \psi d\tau \quad (17)$$

unabhängig von  $\sigma$  ist, also als Energie-Impulsvektor benutzt werden kann. Man vermutet sofort, daß dieser mit der Theorie von Wheeler und Feynman in Zusammenhang steht, was von Kummel nachgewiesen wurde<sup>7</sup>. Auf Grund von (15) und (16) bleibt also die Energie eines Elektrons gleich derjenigen ohne Wechselwirkung, es gibt keine „Selbstenergie“.

Alle Aussagen bleiben bei geeigneter Umbenennung erhalten, wenn man ein äußeres Feld hinzunimmt, in dem sich die Elektronen bewegen, nur daß man dann  $\psi_0$  und  $K(1,2)$  als Lösungen der entsprechenden Dirac-Gleichungen mit Einschluß des äußeren Feldes ansehen muß. Das zeigt aber nun, daß nach (15) und (16) ein einzelnes Atom allein (z. B. ein Wasserstoffatom) nicht strahlen kann, d. h. daß die nach den Dirac-Gleichungen berechneten Energiestufen *absolut* statio-när sind. Wir haben hier also denselben Sachverhalt wie in der klassischen Theorie von Wheeler und Feynman<sup>5</sup>. Auch hier erfolgt eine spontane Emission nur durch die Wechselwirkung mit vielen anderen Atomen, dem Absorber. Nimmt man etwa ein Atom als angeregt an, während alle übrigen im

Grundzustand sich befinden, so kann nur der Fall eintreten, daß sich später (dasselbe gilt auch für früher, denn die ganze Theorie ist selbstverständlich zeitsymmetrisch) die Energie bei einem anderen Atom befindet und das betrachtete Atom in einen tieferen Zustand übergegangen ist. Es erscheint sehr plausibel, daß man wieder auf die üblichen Übergangswahrscheinlichkeiten geführt wird, falls man die umgebende Materie als Absorber voraussetzt. Im einzelnen soll dies in einer folgenden Arbeit ausführlich gezeigt werden.

Etwas ist bei dieser Theorie aber besonders zu bemerken: Würde man in der bisherigen Quantentheorie das Vorzeichen der Wechselwirkung ändern, indem man  $e^2$  durch  $-e^2$  ersetzt, so erhielte man Anziehung zwischen den Teilchen, aber für das elektromagnetische Feld die Existenz von Quanten *negativer* Energie, weil man auch das Vorzeichen des Teiles des Energie-Impulstensors umkehren muß, der dem elektromagnetischen Feld entspricht. In der obigen Theorie ist es nicht möglich, daß ein Atom immer höhere Energiewerte annimmt unter Aussendung von negativen Quanten, weil eben *nur ein Austausch* der Energie zwischen den Atomen möglich ist. Auch diese Tatsache wird in der folgenden Arbeit über die Ausstrahlung an einem Beispiel gezeigt werden. Sie wird von großem Nutzen für die Aufstellung einer divergenzfreien Theorie unter Berücksichtigung der Löchertheorie sein.

Der Nachweis, daß die hier aufgestellte Theorie wirklich keine Divergenzen enthält, läßt sich nicht mehr unmittelbar mit Hilfe der im 1. Abschnitt abgeleiteten Methode durchführen, da man die Wirkungsweise des Operators  $\psi$  zu allen Zeiten kennen müßte, was aber die Lösung von (10) voraussetzen würde. Man kann nur die Konvergenz einzelner Näherungsschritte nachweisen, die man durch Iteration aus (10) erhält.

Hat man nach (10) den Operator  $\psi$  berechnet, so könnte man auch seine Vertauschungsrelationen finden, wie auch diejenigen anderer Größen, wie des Stromes, der Ladungsdichte usw. Leider können wegen noch möglicher Fehler in den bisher durchgeführten Rechnungen noch keine endgültigen Aussagen gemacht werden. Es scheint aber durchaus möglich, daß sogar der Operator der Ladungsdichte an verschiedenen Raumstellen zur gleichen Zeit nicht vertauschbar ist, was ein ganz neues Faktum wäre. Dies kann allerdings in der Theorie ohne die Löchervorstellung erst für einen Zweielektronenzustand auftreten. Die Bedeutung wäre hier folgende: Es ist

nicht möglich, zwei Elektronen dicht beieinander zu lokalisieren. Sollte diese Nichtvertauschbarkeit sich besonders im Falle der Löchertheorie (wo die Rechnungen leider noch etwas komplizierter sind) bestätigen, so müßte dies mit Löchertheorie schon für ein Teilchen gelten. Es wäre also unmöglich, die Struktur einer Ladungsverteilung in einem sehr kleinen Raumgebiet auszumessen.

Unabhängig, ob sich diese Tatsache für die obige Theorie nach Kontrolle der Rechnungen bestätigen sollte oder nicht, scheint mir diese Ungenauigkeitsrelation für die Ladungsdichte auch bei räumlich zueinander liegenden Punkten die geeignete Formulierung für den Einfluß einer Elementarlänge. Hier allerdings würde diese mit der Compton-Wellenlänge des Elektrons übereinstimmen.

Zur Aufstellung der Löchertheorie wird  $\psi$  in einen „positiven“ und „negativen“ Teil zerspalten, indem man in (10)  $\psi_0$  nach Schwinger in diese beiden Teile zerlegt und ebenfalls das  $K$  nach (11). Die genaue Durchführung erfolgt getrennt in einer besonderen Arbeit. Es wird sich hierbei zeigen, daß es nicht mehr möglich ist, eine divergenzfreie Theorie zu schaffen, wenn man die Greensche Funktion  $\delta[(x-y)^2]$  für das Maxwell-Glied beibehält. Dann kann man aber ohne Schwierigkeit nach Pauli-Villars regularisieren, indem man sowohl in der Integralgleichung (10) wie in dem Ausdruck (17) für den Energie-Impulsvektor mit einer Massenverteilung  $\varrho(k)$  integriert über verschiedene zu den hier dann real aufgefaßten Massen  $k$  gehörigen Greenschen Funktionen

$$\int \varrho(z) \bar{A}_\mu(x-y) dK.$$

Wie oben gezeigt, kann die *reale* Auffassung der Massen in der dargelegten Theorie zu *keinen* Schwierigkeiten führen.

Ohne auf die Löchertheorie einzugehen, können wir denselben Gedanken der Regularisierung auch hier verwenden, wenn wir in (10) die Reihenfolge der Faktoren ursprünglich anders ansetzen:

$$\psi(1) = \psi_0(1) + i e \int K(1, 2) \gamma_\mu \psi(2) A_\mu(2) d\tau_2. \quad (18)$$

Statt (17) muß man dann als Energie-Impulsvektor

$$G_m(\sigma) = \int \bar{\psi} \gamma_\nu \psi_{|m} d\sigma_\nu - \frac{i e}{2} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\sigma} - \int_{\sigma}^{\infty} \right) \{ [\bar{\psi} \gamma_\mu \psi_{|m}, A_\mu] + \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_{\mu|m} \} d\tau \quad (19)$$

wählen. Die durch (18) und (19) definierte Theorie ist aber nicht divergenzfrei, wenn man den Ausdruck (9) für  $A_\mu$  benutzt. Bezeichnen wir mit  $A_\mu^{(z)}$  den (9) entsprechenden Ausdruck, wenn man als Greensche Funktion diejenige  $\bar{A}_\mu$  der Wellengleichung mit der Masse  $z$  statt  $\delta[(x-y)^2]$  (die zur Masse Null gehört) benutzt, so kann man zu einer divergenzfreien Theorie kommen, wenn man in (18) und (19)  $A_\mu$  durch

$$A_\mu = \int \varrho(z) A_\mu^{(z)} dz \quad (20)$$

ersetzt und die Regularitätsbedingungen von Pauli-Villars an die Massenverteilung  $\varrho(z)$  stellt. Man erhält dann eine endliche Selbstenergie des Elektrons. Die bei Pais und Uhlenbeck<sup>4</sup> auftretenden Schwierigkeiten sind hier nicht möglich, wie oben gezeigt wurde.

Allerdings ist mit (18) die Beziehung  $j^\nu|_\nu = 0$  ( $j_\nu = \bar{\psi} \gamma_\nu \psi$ ) nur zu beweisen, falls  $[j(1), A(1)] = 0$  ist. Sollte sich dies allgemein als unrichtig herausstellen, so wäre dadurch (10) gegenüber (18) eindeutig ausgezeichnet.